УДК 514.75

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК

В.С.Малаховский

(Калининградский государственный университет)

В работе дана краткая характеристика результатов иссл[е]дований калининградских геометров многообразий гиперквадри[к] в проективном пространстве.

I. Рассмотрим m-мерное многообразие $K(n-1,m,n)$ невы[ро]жденных гиперквадрик Q в n-мерном проективном простра[н]стве P_n. В произвольном репере $R=\{\bar A_0,\bar A_1,\dots,\bar A_n\}$ гиперквадрик[а] Q задается уравнением:

$$F\equiv a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0 \qquad (\alpha,\beta=\overline{0,n}), \tag{I.1}$$

где

$$\det(a_{\alpha\beta})\neq 0 . \tag{I.2}$$

Структурные формы гиперквадрики $Q\in K(n-1,m,n)$ имеют вид:

$$\theta_{\alpha\beta}=d\,a_{\alpha\beta}-a_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha-a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta , \tag{I.3}$$

где ω^β_α – компоненты инфинитезимальных перемещений репера. Обращение в нуль всех форм $\theta_{\alpha\beta}$ означает фиксацию гиперква[дри]ки Q. Многообразие $K(n-1,m,n)$ задается следующей системо[й] уравнений Пфаффа:

$$\theta_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta,i}\tau^i \qquad (i,j,k=\overline{1,m}), \tag{I.4}$$

где τ^i – инвариантные I-формы группы параметров.

Продолжая систему (I.4), получим последовательность ф[ун]даментальных объектов многообразия $K(n-1,m,n)$ (см. [1]):

$$\Gamma_1=\{a_{\alpha\beta},\Lambda_{\alpha\beta,i}\},\ \Gamma_2=\{a_{\alpha\beta},\Lambda_{\alpha\beta,i},\Lambda_{\alpha\beta,ij}\},\dots \tag{I.5}$$

Эти объекты полностью определяют локальную дифференциальн[ую] геометрию многообразия $K(n-1,m,n)$.

Обозначим:

$$F_{i_1i_2\dots i_p}\overset{def}{=}\Lambda_{\alpha\beta,i_1i_2\dots i_p}x^\alpha x^\beta . \tag{I.6}$$

Система алгебраических уравнений

$$F_{i_1}=0,\ F_{i_1i_2}=0,\ \dots,\ F_{i_1i_2\dots i_p}=0 \tag{I.7}$$

определяет характеристическое многообразие $h^{(p)}(m,n)$ порядк[а] p гиперквадрики $Q\in K(n-1,m,n)$.

Система

$$F=0,\ F_{i_1}=0,\ \dots,\ F_{i_1i_2\dots i_p}=0 \tag{I.8}$$

[оп]ределяет фокальное многообразие $f^{(p)}(m,n)$ порядка p гипер[кв]адрики Q. Фокальное многообразие $f^{(1)}(n-1,n)$ состоит в об[щем] случае из 2^n точек. Характеристическое многообразие [$h^{(1)}$](n,n) также состоит из 2^n точек.

Используя систему (I.4) и ее продолжения, приходим к сле[ду]ющим результатам [1], [2]:

Теорема I.I. Множество $S^{(p)}$ фокальных точек $f^{(p)}(m,n)$ [вс]ех гиперквадрик $Q\in K(n-1,m,n)$ образует поверхность в P_n. [Мн]огообразие $K(n-1,m,n)$ огибает $S^{(1)}$ вдоль $f^{(1)}(m,n)$, поверх[но]сть $S^{(1)}$ огибает $S^{(2)}$ вдоль $f^{(2)}(m,n)$ и т.д.

Теорема I.2. Каждая фокальная точка гиперквадрики [Q]$\in K(n-1,n-1,n)$ в общем случае описывает гиперповерхность, ка[са]тельная гиперплоскость к которой совпадает с касательной [ги]перплоскостью к гиперквадрике Q в той же точке, и наоборот.

2. Определение 2.I. Квадратичным элементом C [на]зывается $(n-2)$-мерная невырожденная квадрика в n-мерном [пр]оективном пространстве [3].

Для $n=3$ квадратичный элемент – невырожденная кривая [вт]орого порядка (коника).

Определение 2.2. Конгруэнцией K_0 называется [мн]огообразие $K(n-1,n-1,n)$, каждая гиперквадрика Q которого [со]держит фокальный квадратичный элемент C, причем гиперпло[с]кости π квадратичных элементов образуют $(n-1)$-параметричес[ко]е семейство.

Помещая вершину A_0 репера в характеристическую точку [г]иперплоскости π, A_n – в полюс этой гиперплоскости относи[т]ельно гиперквадрики Q и осуществляя соответствующую норми[р]овку вершин A_α, приводим систему уравнений Пфаффа конгру[э]нции K_0 к виду:

$$\begin{cases}\omega^n_0=0,\ \ \omega^0_n=0,\ \ \omega^0_i=\omega^i_{n+1},\ \ \omega^j_i+\omega^i_j=0,\ \ \omega^i_i=\omega^0_0,\\ \omega^i_n=m\omega_i,\ \ dm+2(1+n)m\omega^0_0=0,\ \ \omega^0_n=a^k\omega_k .\end{cases} \tag{2.I}$$

[З]десь $i,j,k,p,q=\overline{1,n-1}$; $i\neq j$ и по индексам i,j суммирование не [п]роизводится.

[У]равнения гиперквадрики $Q\in K_0$ и квадратичного элемента $C\in Q$ принимают соответственно вид:

Зак. 1296

$$(x^n)^2 + \delta_{pq} x^p x^q - (x^0)^2 = 0, \qquad (2.2$$

$$\delta_{pq} x^p x^q - (x^0)^2 = 0 \;, \; x^n = 0 . \qquad (2.3$$

Т е о р е м а I.3. Конгруэнции K_0 существуют и опре ляются с произволом двух функций $n-1$ аргументов. Все ги квадрики $Q \in K_0$ касаются инвариантной гиперквадрики Q_0 :

$$\Phi = \delta_{pq} x^p x^q - m(x^n)^2 - (x^0)^2 = 0 \qquad (2.4$$

вдоль своих фокальных квадратичных элементов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замыкая систему (2.I), п лучим:

$$\omega_0^k \wedge \omega_k^0 = 0, \;\; \nabla a^k \wedge \omega_k^0 = 0, \qquad (2.5$$

где $\nabla a^k = da^k + a^p\omega_p^k - a^k\omega_n^n$. Система (2.I), (2.5) - в инво ции и имеет решение с произволом двух функций $n-1$ аргуме тов. Сравнивая (2.3) с (2.4), убеждаемся, что квадратичный элемент C лежит на гиперквадрике Q_0 , причем в силу того что $d\Phi = -2\omega_0^0 \Phi$, гиперквадрика Q_0 - инвариантна. Из (2.2) следует, что гиперквадрика Q касается гиперквадрик Q_0 вдоль C .

Рассмотрим случай $n=3$, т.е. конгруэнцию квадрик с ф кальными кониками. Фокальное многообразие квадрики $Q \in K_0$ с тоит в этом случае из фокальной коники C и двух точек, пр надлежащих прямой, проходящей через характеристическую точ A_0 плоскости коники C [4, с.61-62]. Если же квадрика $Q \in K(2,2,3)$ содержит пару пересекающихся фокальных прямых и ℓ_2 (т.е. распавшуюся конику), то фокальное многообразие квадрики Q состоит только из этих прямых и одной фокально точки, не лежащей в плоскости распавшейся коники, причем т ка $M = \ell_1 \wedge \ell_2$ описывает линейчатую квадрику [5].

3. Для конгруэнций квадрик Q , имеющих фокальные то порядка $p>1$ (для конгруэнций $\mathcal{L}_p$), получены следующие р зультаты [6]:

Т е о р е м а 3.I. Невырождающееся многообразие, оп санное фокальной точкой второго порядка $M \in Q \in \mathcal{L}_2$, являетс четырехкратной фокальной поверхностью конгруэнции $\mathcal{L}_2$.

Т е о р е м а 3.2. Точка гладкой поверхности являет фокальной точкой второго порядка ее квадрики Ли, т.е. кон груэнция квадрик Ли есть конгруэнция $\mathcal{L}_2$.

Т е о р е м а 3.3. Конгруэнция линейчатых квадрик т да и только тогда является конгруэнцией $\mathcal{L}_3$, когда прямо

ейные образующие ее квадрики Q являются фокальными прямыми.

Т е о р е м а 3.4. Поверхность, описанная фокальной то кой $M \in Q \in \mathcal{L}_3$, является линейчатой квадрикой.

Т е о р е м а 3.5. Если фокальная точка M квадрики $\in \mathcal{L}_3$ описывает невырождающуюся фокальную поверхность, то на является фокальной точкой произвольного порядка $p>3$.

4. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M_n , в аждом касательном пространстве T_n которого задана централь ая невырожденная гиперквадрика Q . Пусть ω^i $(i,j,k,\ldots=\overline{1,n})$- азовые I-формы многообразия M_n . Имеем [7]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \;, \; d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \omega^k \wedge \omega_{ik}^j \;,$$
$$d\omega^j_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!(p-s)!}\, \omega^k_{(i_1 \ldots i_s} \wedge \omega^j_{i_{s+1} \ldots i_p)k} + \omega^k \wedge \omega^j_{i_1 \ldots i_p k} . \qquad (4.I)$$

бозначим через x^i - координаты вектора $\vec{x} \in T_n$ или, что то е, координаты точки x центроаффинного пространства T_n отно ительно базиса $\{\vec{e}_i\}$:

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i . \qquad (4.2)$$

равнение центральной невырожденной гиперквадрики $Q \subset T_n$ с ентром C (c^i) запишется в виде:

$$a_{ij} x^i (x^j - 2c^j) - 1 = 0, \qquad (4.3)$$

ричем $\det(a_{ij}) \neq 0$. Формы Пфаффа

$$\nabla a_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\omega_i^k - a_{ik}\omega_j^k \;, \;\; \nabla c^i = dc^i + c^k \omega_k^i \qquad (4.4)$$

вляются структурными формами гиперквадрики Q .

Поле геометрического объекта $\{a_{ij}, c^k\}$ на многообразии M_n определяется системой уравнений Пфаффа

$$\nabla a_{ij} = a_{ijk}\,\omega^k \;, \qquad \nabla c^i = c^i_j\,\omega^j . \qquad (4.5)$$

родолжая систему (4.5), получим:

$$\nabla a_{ijk} - a_{hj}\omega_{ik}^h - a_{ih}\omega_{jk}^h = a_{ijkh}\omega^h, \;\; \nabla c^i_j - c^k\omega^i_{kj} = c^i_{jk}\,\omega^k . \qquad (4.6)$$

з (4.5) следует, что многообразие M_n является римановым ногообразием, на котором задано поле контравариантного век ора $\{c^i\}$.

Объект связности Леви-Чевита $\{\Gamma^k_{ij}\}$ на многообразии M_n адается формулой

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\, a^{kh}(a_{hij} + a_{hji} - a_{ijh}), \qquad (4.7)$$

де a^{ij} - приведенные миноры матрицы (a_{ij}) : $a^{ij} a_{jk} = \delta^i_k$.

Имеем: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \quad \nabla\Gamma^k_{ij} + \omega^k_{ij} = \Gamma^k_{ijh}\,\omega^h.$ (4.8

Формы Пфаффа $\tilde{\omega}^j_i = \omega^j_i - \Gamma^j_{ik}\omega^k$ являются формами аффинной связн сти без кручения, т.к.

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \tilde{\omega}^i_k, \quad d\tilde{\omega}^j_i = \tilde{\omega}^k_i \wedge \tilde{\omega}^j_k + \frac{1}{2} R^j_{ikh}\,\omega^k \wedge \omega^h, \qquad (4.9$$

где

$$R^j_{ikh} = \Gamma^j_{ikh} - \Gamma^j_{ihk} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^j_{hp} - \Gamma^p_{ih}\Gamma^j_{kp} \qquad (4.1$$

– тензор кривизны риманова пространства M_n.

Рассмотрим систему величин

$$F^j_i = C^j_i + c^k\Gamma^j_{ik}. \qquad (4.1$$

Так как $dF^j_i = F^j_{ik}\,\omega^k + F^j_k\,\omega^k_i - F^k_i\,\omega^j_k,$ (4.1

где $F^j_{ik} = C^j_{ik} + C^h_k\Gamma^j_{ih} + c^h\Gamma^j_{hik},$ (4.1

то $\{F^j_i\}$ – аффинор. Дважды ковариантный симметрический тен зор:

$$g_{ij} = a_{ik}F^k_j + a_{jk}F^k_i \qquad (4.1$$

задает на M_n ассоциированную риманову метрику, отличную в щем случае от метрики, определяемой тензором $\{a_{ij}\}$. Налагая на аффинор $\{F^j_i\}$ дополнительные требования, мы получим раз личные классы гладких многообразий рассматриваемого типа. Н пример, если

$$F^k_i F^j_k = \varepsilon\,\delta^j_i, \quad \varepsilon^2 = 1, \qquad (4.1$$

то многообразие M_n оказывается наделенным структурой почти произведения (при $\varepsilon = +1$) или почти комплексной структурой (при $\varepsilon = -1$) [8].

При исследовании n-параметрического семейства (комп са) гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве также никает риманова связность Γ, не являющаяся в общем случае связностью Леви-Чивита [9].

5. Рассмотрим дифференцируемое отображение $\varphi: P_n \to p_n$ n-мерного проективного пространства P_n на n-мерное п ктивное пространство p_n. В реперах $\{\bar{A}_{J'}\}$, $\{\bar{a}_{i'}\}$ $(J', j', K', i', j',$ $k' = \overline{0,n}$), где $A_0 = \varphi(a_0)$, оно определяется системой уравнен Пфаффа

$$\omega^i_0 = \lambda^i_J\,\Omega^J_0, \quad \nabla\lambda^i_J = \lambda^i_{JK}\,\Omega^K \quad (J, j, K, i, j, k = \overline{1,n}). \qquad (5.$$

Обозначим через $\mathcal{H}(a_0)$ – множество всех гиперквадрик п странства p_n, содержащих точку a_0. Уравнение гиперквадри $q \in \mathcal{H}(a_0)$ запишется в виде:

$$b_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i x^0 = 0 \qquad (5.$$

ри фиксации точки A_0, т.е. при $\Omega^J_0 = 0$, закон изменения ве ичин a_i, a_{ij} приводится к виду:

$$\overset{\circ}{\nabla} b_i = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} b_{ij} = b_{(i}\,\pi^0_{j)}. \qquad (5.3)$$

бъект $\{b_i\}$ определяет касательную гиперплоскость к гипер вадрике q в точке a_0: $b_i x^i = 0$.

Положим

$$B_J = \lambda^i_J b_i, \quad B_{JK} = \lambda^i_J \lambda^j_K b_{ij} - \lambda^i_{JK} b_i. \qquad (5.4)$$

огда

$$\overset{\circ}{\nabla} B_J = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} B_{JK} = B_{(J}\,\Pi^0_{K)}, \qquad (5.5)$$

.е. гиперквадрика Q:

$$B_{JK}X^J X^K + 2B_J X^J = 0 \qquad (5.6)$$

стационарна. Возникает дифференцируемое отображение f_q: $\mathcal{H}(a_0) \to \mathcal{H}(A_0)$, для которого $f_q(q) = Q$.

Положим

$$\gamma_K = \frac{1}{n+1}\,\overset{*}{\lambda}{}^J_i\,\lambda^i_{JK}, \quad \overset{*}{\lambda}{}^J_i\,\lambda^i_K = \delta^J_K. \qquad (5.7)$$

огда формулы

$$\tilde{B}_J = \lambda^i_J b_i, \quad \tilde{B}_{JK} = \lambda^i_J \lambda^j_K b_{ij} - \lambda^i_{(J}\gamma_{K)} b_i \qquad (5.8)$$

пределят другое отображение $\tilde{f}_q: \mathcal{H}(a_0) \to \mathcal{H}(A_0)$, при котором иперквадрика (5.2) отображается в гиперквадрику $\tilde{Q}$:

$$\tilde{B}_{JK}X^J X^K + 2\tilde{B}_J X^J = 0.$$

Таким образом, точечное дифференцируемое отображение $\varphi: P_n \to p_n$ индуцирует два дифференцируемых отображения f_q $\tilde{f}_q$ многообразий гиперквадрик.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. ифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-ерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-134.

2. М а х о р к и н В.В. Многообразия гиперквадрик n-ерного проективного пространства и их фокальные многообра ия // Дифференциальная геометрия многообразий фигур / Кали нингр. ун-т. Калининград, 1978. Вып.9. С.60-63.

3. М а л а х о в с к и й В.С. Поля геометрических объек ов на многообразии квадратичных элементов // Тр. Томск. ун-та. омск, 1964. Т.176. С.11-19.

4. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых

и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном про-
странстве. Учебн. пособие. Калинингр. ун-т. Калининград, 19
72 с.

5. Малаховский В.С. О многообразиях фигур в однородном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып.15. С.55-59.

6. Малаховская С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: С науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Вып.13. С.6 64.

7. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-134.

8. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрическ структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9.

9. Малаховский В.С. Структуры, порожденные полем гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообраз фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1985. Вып.16. С.37-40.

УДК 514.75

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОЛЯ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ ОСНАЩЕННЫХ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В.Малаховский

(Калининградский государственный университет)

Рассмотрено n-параметрическое семейство Π_n оснащен коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ n-мерных проективных пространств В каждом из проективных пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n определены ин вариантные поля гиперквадрик, порожденные фундаментальным объектом Γ_2 второго порядка семейства Π_n. Исследованы ге метрические образы, ассоциированные с инвариантными гиперкв дриками.

1. Невырожденное семейство Π_n оснащенных коллинеаций π:

$$x^i = \frac{M^i_J X^J}{1 - P_K X^K} \quad (I, J, K, i, j, k = \overline{1,n}) \qquad (1.1)$$

вух проективных пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n определяется системой равнений Пфаффа (1.6) работы [1]:

$$\omega^i = \lambda^i_J \Omega^J, \ \nabla M^i_J = M^i_{JK} \Omega^K, \ \nabla P_J + \Omega^0_J - M^K_J \omega^0_K = P_{JK} \Omega^K, \qquad (1.2)$$

де

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega^i_0, \ \Omega^J \overset{def}{=} \Omega^J_0, \ \det(\lambda^i_J) \cdot \det(M^i_J) \neq 0, \qquad (1.3)$$

" ∇ " - символ ковариантного дифференцирования.

Продолжая уравнения (1.2), находим:

$$\begin{cases} \nabla \lambda^i_J = \lambda^i_{JK} \Omega^K, \ \nabla \lambda^i_{JK} + \lambda^i_{(J} \Omega^0_{K)} - \lambda^i_{(J} \lambda^k_{K)} \omega^0_k = \lambda^i_{JKL} \Omega^L, \\ \nabla M^i_{JK} + M^i_{(J} \Omega^0_{K)} - M^{(i}_J \lambda^{k)}_K \omega^0_k = M^i_{JKL} \Omega^L, \\ \nabla P_{JK} + P_{(J} \Omega^0_{K)} - M^k_{JK} \omega^0_k = P_{JKL} \Omega^L. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Рассмотрим системы величин

$$L_J = \frac{1}{n+1} (\overset{*}{M}{}^K_i M^i_{KJ} - \overset{*}{\lambda}{}^K_i \lambda^i_{KJ}), \qquad (1.5)$$

$$\lambda_i = L_K \overset{*}{\lambda}{}^K_i, \quad m_i = L_K \overset{*}{M}{}^K_i, \qquad (1.6)$$

де $\overset{*}{\lambda}{}^K_i$, $\overset{*}{M}{}^K_i$ - взаимные тензоры к λ^i_J, M^i_J:

$$\overset{*}{\lambda}{}^K_i \lambda^i_J = \delta^K_J, \quad \overset{*}{M}{}^K_i M^i_J = \delta^K_J. \qquad (1.7)$$

ифференцируя (1.5), (1.6), получим:

$$\nabla L_J = L_{JK} \Omega^K, \ \nabla \lambda_i = \lambda_{iK} \Omega^K, \quad \nabla m_i = m_{iK} \Omega^K, \qquad (1.8)$$

где

$$L_{JK} = \frac{1}{n+1} (\overset{*}{M}{}^L_i M^i_{LJK} - \overset{*}{\lambda}{}^L_i \lambda^i_{LJK} + \overset{*}{\lambda}{}^L_k \overset{*}{\lambda}{}^H_i \lambda^k_{HK} \lambda^i_{LJ} - \overset{*}{M}{}^L_k \overset{*}{M}{}^H_i M^k_{HK} M^i_{LJ}), \qquad (1.9)$$

$$\lambda_{iK} = L_{KL} \overset{*}{\lambda}{}^J_i + L_J \overset{*}{\lambda}{}^J_{iK}, \qquad (1.10)$$

$$m_{iK} = L_{KL} \overset{*}{M}{}^J_i + L_J \overset{*}{M}{}^J_{iK}. \qquad (1.11)$$

Из формулы (1.8) следует, что системы величин $\{L_J\}$, $\{\lambda_i\}$ являются тензорами. Тензор $\{L_J\}$ задает в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантную гиперплоскость

$$L_J X^J = 0, \qquad (1.12)$$

проходящую через точку A_0. Тензоры $\{\lambda_i\}$ и $\{m_i\}$ определяют в пространстве p_n инвариантные гиперплоскости, проходящие через точку a_0.

2. Рассмотрим системы величин

$$q_{ij} = -\lambda_{(i|K|} \overset{*}{\lambda}{}^K_{j)}, \quad s_{ij} = -m_{(i|K|} \overset{*}{\lambda}{}^K_{j)}. \qquad (2.1)$$